



# Czy ocenianie przez zdobywanie sprawności może być zastosowane w nauczaniu matematyki?

Wacław ZAWADOWSKI

Propozycja oceniania przez zdobywanie sprawności nie jest niczym nowym. Parę ładnych lat temu w „Matematyce”<sup>1</sup> Małgorzata Mikołajczyk zaproponowała dla szkoły podstawowej listę umiejętności do zdobywania przez uczniów klas I-III i osobno IV-V i VI-VIII.

Każda z tych umiejętności, tak jak sprawności harcerskie, była związana z pewnym tytułem do zdobycia i odpowiednią nazwą. W tym artykule postaram się uzasadnić tezę, że ten właśnie styl, zaproponowany przez Małgorzatę Mikołajczyk, może być z powodzeniem zastosowany w szkole i w kształceniu nauczycieli, gdy matematykę będziemy uprawiać z pełnym zastosowaniem prostych kalkulatorów i w ogóle technologii informacyjnej. Co więcej, zastosowanie kalkulatorów od samego początku nauki o liczbach w nauczaniu wczesnoszkolnym może w bardzo korzystny sposób zmienić styl nauczania matematyki. Może się to stać wtedy, gdy nauczyciel z odpowiednim przygotowaniem będzie uczył wstępnej arytmetyki z kalkulatorem i interaktywnie.

Ponadto, przy takim stylu nauczania istnieje możliwość „wykorzystania” starszych uczniów do nauczania młodszych. Taka organizacja pracy rozwija szeroko rozumiane umiejętności kluczowe i może mieć duże walory pedagogiczne, zachęcać do współpracy, przejmowania odpowiedzialności za naukę podopiecznych, rozwijanie dociekliwości.

Uważam, że odpowiedź na tytułowe pytanie jest pozytywna. Warto tego spróbować.

Jest jeszcze jeden aspekt tej sprawy. Niedorozwinięte pojęcie liczby blokuje rozwój algebry, zwykłej szkolnej algebry. Postępowanie się kalkulatorem pomaga w rozwoju pojęcia liczby dziesiętnej i w ogóle liczby związanej z punktem na osi liczbowej, czyli liczby rzeczywistej. Liczba jako punkt na osi jest właściwie warunkiem wstępnym do rozwoju rozumienia prostej szkolnej algebry, wykresów funkcji i wielu innych zagadnień.

Ale zacznijmy od początku.

Np. w **klasach I-III** Małgorzata Mikołajczyk proponuje takie sprawności i związane z nimi tytuły:

## Liczek

1. Liczy do 100 do przodu i wstecz po 4, 5, 6, 7.
2. Nie pomyli się w tabliczce mnożenia do 25.
3. Zapisze 5 podyktowanych działań i poda ich wyniki.

## Sprzedawca

1. Sprawnie liczy do 1000.
2. Sprzedaje towary na litry, kilogramy, metry, tuziny.
3. Poprawnie nalicza należność za zakupiony towar, wydaje resztę, wystawia rachunki (zapisywanie liczb słowami).

<sup>1</sup> Mikołajczyk M. Lista umiejętności – inne spojrzenie na program nauczania matematyki, „Matematyka” nr 3/1992.

## Klasy IV-V

### Milioner

1. Sprawnie wykonuje różne obliczenia pieniężne do 1 miliona.
2. Rozwiązuje cztery podane zadania tekstowe.
3. W danym tekście wszystkie liczby w zapisie rzymskim poda cyframi arabskimi.
4. Sprawnie oblicza procenty.

### Kartezjańczyk

1. Na płaszczyźnie z wprowadzonym kartezjańskim układem współrzędnych zaznaczy zbiór punktów, które spełniają określone warunki.
2. Zaprojektuje urządzenie pokoju lub sali lekcyjnej, zakoduje dane w postaci współrzędnych.
3. Punkty o podanych współrzędnych zaznaczy w różnych układach współrzędnych.
4. Wie, kim był, gdzie i kiedy żył Kartezjusz.

## Klasy VI-VIII

### Projektant

1. Przeprowadzi 5 dowolnie wybranych konstrukcji geometrycznych (wpisywanie i opisywanie okręgów, kreślenie stycznych itp.)
2. Znajdzie symetrie podanych figur.
3. Zaprojektuje dowolną figurę o zadanym typie symetrii.
4. Powiększy w zadanej skali niezbyt skomplikowany rysunek.
5. Poda wynik przekształcenia danych figur przez obrót, przesunięcie, jednokładność, symetrię osiową.

### Sobieradek

1. Potrafi postąpić się ogólnoszkolnym planem lekcji i kolejowym rozkładem jazdy.
2. Zmierzy wysokość drzewa.
3. Potrafi postąpić się kalkulatorem.
4. Obmyśli metodę i wykona model kąta prostego.
5. Opracuje preliminarz wycieczki klasowej.

To było prawie 20 lat temu i było dostosowane do wtedy obowiązującego programu nauczania. Już wtedy Sobieradek powinien postąpić się kalkulatorem, ale dopiero w ówczesnej klasie VIII. Te umiejętności sformułowane są w zasadzie na poziomie przeciętnego ucznia. Każdą z tych umiejętności powinno zdobyć jak najwięcej osób w klasie. Lista umiejętności radykalnie zmienia sytuację zdolnego ucznia, tradycyjny system nauki klasowej, gdzie tempo pracy dostosowane jest do przeciętnego ucznia, hamuje bowiem rozwój jednostek zdolniejszych, zmusza je do bezczynności umysłowej. Ale też nie otacza opieką słabych.

Jednak mogą być też sprawności wykraczające ponad wymagania programowe. Zaproponowano m.in. takie: Badacz matematyki starożytnej, Szachista, Informatyk, Mistrz Origami.

Podaję ten obszerny, prawie dosłowny fragment, aby czytelnik miał konkretne wyobrażenie o systemie zaproponowanym przez Małgorzatę Mikołajczyk. Ten system może funkcjonować obok tradycyjnego i może być wprowadzany stopniowo, w miarę nabywania wprawy przez nauczyciela lub nauczycieli w danej szkole i przyzwyczajania się do niego licznej społeczności uczniowskiej. Istotne jest nawiązanie do harcerstwa i przywołanie jednego z najwybitniejszych pedagogów polskich Aleksandra Kamińskiego. Te krótkie referencje są bardzo znaczące dla tych, którzy znają te tradycje. Innym trzeba to wyjaśnić bardziej szczegółowo. Otóż istotą zdobywania sprawności było przyjmowanie przez starszych pewnej odpowiedzialności za młodszych. Do tego jest potrzebna pewna organizacja pionowa wg starszeństwa (*vertical grouping*). Takiej organizacji w tradycyjnej szkole, gdzie podstawową jednostką jest klasa złożona z rówieśników, po prostu nie ma. Nauczyciel nie może liczyć na pomoc starszych uczniów bez zaangażowania kolegi i bez zmiany ustalonego porządku w szkole, gdzie każda godzina lekcyjna jest dość ściśle zaplanowana, a wszelkie działania wychodzące poza ten porządek mogą się odbywać raczej po lekcjach. Są na świecie szkoły, gdzie jest możliwe częściowe przełamanie tego schematu, ale to rzadkość (np. szkoły DeCroly w Belgii).

System zdobywania sprawności ma jeszcze jeden aspekt rozumiany bez słów przez tych, którzy przeszli dobrą szkołę w harcerstwie. Jest on dobrze opisany w książce Marka Twaina, w epizodzie malowania płotu przez Tomka Sawyera. Jest też opisany w książkach Kamyka. Wzbudzenie zainteresowania przychodzi w sposób naturalny, gdy młodzi znajdują odpowiednie wzory w starszych, a starsi przyjmują pewną odpowiedzialność za kierowanie młodszymi. W dobrze funkcjonujących drużynach harcerskich działało to znakomicie. Może to być wykorzystane również w szkole, nie tylko w organizacjach takich jak harcerstwo.

Czy warto tego próbować? Gdy zostaniemy przy tradycyjnych programach nauczania, to nie jest to konieczne. Ale te tradycyjne pogromy i systemy nauczania zaniedbują to, co jest niezwykle istotne dla edukacji do prawdziwego, realistycznie pojmowanego dorosłego życia. Zaniedbują stosowanie kalkulatorów, tych najprostszych i tych trochę bardziej wyrafinowanych, graficznych, komputerów z odpowiednimi programami, odpowiednich ogólnie dostępnych programów z sieci.

Ogólnie biorąc, technologia informacji i komunikacji, krótko TIK, nie jest wykorzystywana w odpowiednio intensywny sposób. Tradycyjna organizacja pracy w szkole temu nie sprzyja. Często nauczyciel nie może dobrze zrozumieć sprawności w stosowaniu TIK, które niektórzy uczniowie w jego klasach już mają opanowane, i nie może tego wykorzystać. Na ten aspekt sprawy zwraca uwagę Kenneth Wilson w swoich tekstach pt. „Redesigning Education”<sup>2</sup>.

Gdy dopuścimy możliwość wykorzystania struktury pionowej w szkole, gdzie niektórzy starsi uczą młodszymi, wtedy nauczyciel w każdej klasie może mieć kilku asystentów – może korzystać z pomocy odpowiednio przygotowanych do tego starszych uczniów. Taki system powinien być też wykorzystany w kształceniu nauczycieli w szkołach wyższych.

A więc na początek spróbujmy, jak by to wyglądało dla początkowego wprowadzenia najprostszego kalkulatora do początkowej arytmetyki Anno Domini 2017.

Wprowadzimy dla każdej sprawności trzy stopnie wtajemniczenia, np.

## Kalkulator A

### Pierwszy stopień (uczeń)

Wie, że powtarzane użycie znaku równości = przy mnożeniu na zwykłym, najbardziej rozpowszechnionym kalkulatorze (typu TI 106) powtarza działanie przez pierwszy argument, a przy pozostałych trzech działaniach: dodawania, odejmowania i dzielenia: +, -, ÷, powtarzane użycie znaku równości powoduje powtórzenie działania przez drugi argument. Potrafi zbadać, jak to jest na jego kalkulatorze w komórce. Potrafi to wykorzystać do obliczenia, po ilu latach 100 zł złożone w banku na 10% rocznie podwoi się. Potrafi znaleźć, jakiego procentu trzeba by zażądać od banku, aby kapitał podwoił się po 5 latach.

Wie, jaka jest największa liczba, którą „rozumie” kalkulator i co się stanie, gdy doda do niej jeden.

### Drugi stopień (czeladnik)

Potrafi notować wyniki działań na kalkulatorze w sposób interaktywny, np. taki:

2+3 =  
5  
=  
8  
=  
11  
=  
14 etc.  
2x3 =  
6  
=  
12  
=  
24  
=  
48 etc.

<sup>2</sup> Wilson K., Daviss B. *Redesigning Education*, John Macrae Book, Henry Holt & Company, 1994.

Potrafi liczby zapisane w okienku kalkulatora zaznaczyć kropką na osi liczbowej w odpowiedniej skali.

Używając tego lub podobnie interaktywnego dialogu z kalkulatorem, potrafi znaleźć, w jakim dniu tygodnia przypadną jego osiemnaste urodziny.

Wie, że użycie dwóch znaków, jednego po drugim:  $\div =$ , daje w wyniku odwrotność liczby (być może w pewnym przybliżeniu), np.

$$2 \div =$$

0.5

$$\div =$$

2

$$\div =$$

0.5

$$\div =$$

2 etc.

Ale

$$3 \div =$$

0.3333333

$$\div =$$

3.0000003

$$\div =$$

0.3333333

$$\div =$$

3.0000003

bo najprostsze kalkulatory rachują w sposób przybliżony i podają tylko 8 cyfr w okienku.

Potrafi narysować te kolejno pojawiające się wyniki na osi liczbowej.

Potrafi ustalić, czy kalkulator dostępny w jego telefonie komórkowym działa w podobny sposób, czy inaczej. Zbada jak.

Wie, jaka jest największa liczba, którą „rozumie” kalkulator i co się stanie, gdy poprosi o jej odwrotność, np.  $99999999 \div =?$

### Trzeci stopień (mistrz)

Potrafi nauczyć pewną grupkę kolegów umiejętności potrzebnych na osiągnięcie

pierwszego i drugiego stopnia, tak aby zdobyli te sprawności.

Na pewno możemy spróbować to zastosować w klasach nauczania początkowego. Nauczyciel musi dobrać stopnie wtajemniczenia do konkretnych możliwości klasy. Może trochę złagodzić wymagania lub je zaostrzyć. Powinien też stopniowo przekazywać swoją rolę „korepetytora” pierwszej kadrowej grupy uczniów w ich ręce, a samemu przyjmować rolę nadrzędną i za dużo nie mówić.

**Kalkulator E** (poziomy wprowadzające dla nauczania początkowego)

### Kalkulator E1

Potrafi sam poprawić swoje rachowanie w pamięci w zakresie do 100, postępując się kalkulatorem.

To może być prowadzone w ten sposób, że uczeń wykorzystuje powtarzanie działania przez naciskanie klawisza  $=$ , np.

Wpisz  $2+=$ , kalkulator odpowie 4. Wciśnij jeszcze raz  $=$ , kalkulator odpowie 6. Co teraz będzie, gdy wciśniesz jeszcze raz  $=$ ? Nie wciskaj – pomyśl i zapisz. Po zapisaniu wciśnij  $=$ . Czy zapis zgadza się z tym, co pokazał kalkulator? Gdy tak – brawo. Jaki będzie wynik, gdy naciśniesz jeszcze raz  $=$ ? Zapisz, naciśnij  $=$  i sprawdź, czy się zgadza. Powtarzaj to aż do pierwszej pomyłki. Zapis zachowaj. Następnym razem staraj się poprawić swój wynik. Jeżeli osiągasz 100 bez błędu, zmień początkową liczbę 2 na inną, np. 3, a potem inne i powtórz to postępowanie. Jeżeli to już idzie bez błędu, to spróbuj mnożenia:

Wpisz  $2x=$ , kalkulator odpowie 4. Wciśnij jeszcze raz  $=$ , kalkulator odpowie 8. Co teraz będzie, gdy wciśniesz jeszcze raz  $=$ ? Nie wciskaj – pomyśl i zapisz. Po zapisaniu wciśnij  $=$ . Czy zapis zgadza się z tym, co pokazał kalkulator? Gdy tak – brawo. Jaki będzie wynik, gdy naciśniesz jeszcze raz  $=$ ? Zapisz, naciśnij  $=$  i sprawdź, czy się zgadza. Powtarzaj to aż do pierwszego

błędu. Zapis zachowaj. Następny razem staraj się poprawić swój wynik. Jeżeli przekroczysz 100 bez błędu, osiągnąłeś sprawność Kalkulator E100.

Sprawność Kalkulator 100 pasuje do nauczania początkowego i łatwiej można doprowadzić do jej osiągnięcia, gdy uczniowie pracują w parach. Zapisywanie może być wtedy niepotrzebne albo ograniczone do momentu pierwszego błędu, tak aby uczeń mógł swoje osiągnięcie zapamiętać i poprawić. Istotne jest to, że uczeń, posługując się kalkulatorem, może sam zobaczyć swój błąd i sam poprawić swoje osiągnięcia (patrz Józef Kozielecki w sieci, *homo transgressivus*).

Podobnie można zaprojektować wymagania na sprawność Kalkulator 1000. Inne warianty czekają na opracowanie i sprawdzenie w działaniu.

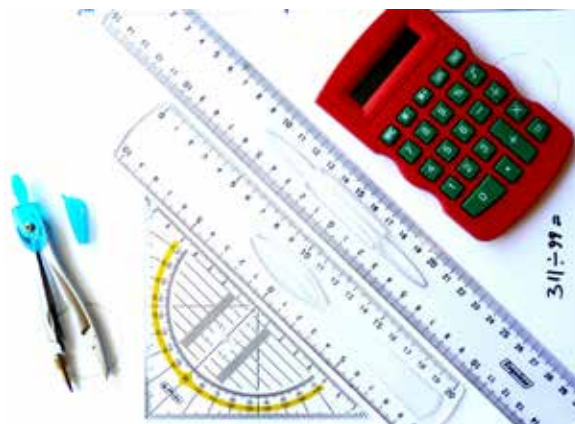
W podobny sposób możemy opracować wymagania na stopień, który może się nazywać np. Kreślarz. Jak zawsze na początku wymagania musi aprobować lub sam ustalić nauczyciel, który podejmuje się wprowadzenia innowacji.

Podam dla równowagi trochę inny wariant tej geometrycznej sprawności niż ten zalecany w roku 1992.

### Mistrz Półkwadratu

#### Pierwszy stopień

Potrafi rysować za pomocą półkwadratu proste figury płaskie, np. prostokąt, kwadrat, odcinki (proste) prostopadłe, odcinki (proste) równoległe. Wie, że proste prostopadłe to takie, że jedna jest osią symetrii drugiej. Narysuje oś liczbową i potrafi na niej umieścić np. niektóre ułamki i inne liczby. Potrafi zbadać, czy są w zasięgu znaki, które mają oś symetrii, np. niektóre litery, jak litera E, napisy (np. kobytamamatybok; wółutyłamamitytułów), figury geometryczne, ornamenty.



**Przyrządy do geometrii. Półkwadrat i linijki, które z jednej strony mają podziałkę od zera do 20 lub 30, a z drugiej podziałkę z zerem w środku. To jest bardzo wygodne w użyciu i wzmacnia pojęcie liczb ujemnych, tych z lewej strony zera. Bardzo przydatny w geometrii jest też zwykły kalkulator.**

#### Drugi stopień

Za pomocą półkwadratu potrafi narysować cień w równoległych promieniach słońca, np. czworokąt zbudowanego z patyczków łączonych gumkami aptekarskimi. Podobnie z niektórymi innymi prostymi figurami przestrzennymi. Potrafi narysować za pomocą półkwadratu trójkąt równoboczny. Narysuje np. kilka siatek sześcianu lub prostopadłościanu do złożenia bez kleju. Rysuje zmniejszenia i powiększenia figur za pomocą jednokładności.

#### Trzeci stopień

Jak zwykle: samodzielnie nauczy pewną grupkę innych tego, co sam już umie jako Mistrz Półkwadratu pierwszego i drugiego stopnia.

Mogą być później ustalone inne warianty, np. **Kreślarz Cabri** (Kózka, C.a.R., Compass & Ruler, Euklides), **Kreślarz Kartezjusz** (używa Inkscape lub innego podobnego programu).

Inne specjalności mogą być takie:

- **Mistrz Wykresów Funkcji** (opanuje program „wykresy funkcji online” z sieci i potrafi go

zastosować do przybliżonego rozwiązywania równań; zna inne takie programy)

- **Mistrz Geogebra** (komentarz niepotrzebny, bo to znany popularny program)
- **Mistrz Binomial Calculator** (dostępny w sieci, komentarz niepotrzebny)
- **Mistrz Trójkąta Pascala** (rozumie budowę trójkąta Pascala, potrafi go wygenerować za pomocą arkusza kalkulacyjnego, rozumie znaczenie symboli  $nPr$  i  $nCr$ )
- **Mistrz Kwitek** (potrafi interpretować kwity fiskalne; wie, że często długa lista zakupów sprowadzona zostaje do trzech liczb, z opodatkowaniem odpowiednio A, B, D, co można przedstawić na wykresie słupkowym i przedstawić również opodatkowanie średnie z takiego zakupu)
- **Pitagorejczyk 1** (wie, co to były liczebniki kamyczkowe pitagorejczyków i jakie wnioski wyciągali z nich pitagorejczycy; od nich pochodzą nazwy: liczby kwadratowe, prostokątne, trójkątne; zna liczebniki dwójkowe, inne układy pozycyjne, formułuje cechy podzielności w tych układach)
- **Pitagorejczyk 2** (wie, jakimi muzycznymi instrumentami posługiwali się pitagorejczycy i jak wiązali podziały strun z brzmieniem; potrafi to zademonstrować)
- **Pitagorejczyk 3** (zna kilka dowodów twierdzenia Talesa i Pitagorasa; wykona plakaty ilustrujące przebieg tych dowodów)
- **Euklides** (wie, jak Euklides uzasadniał, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele)
- **Eratostenes** (wie, w jaki sposób Eratostenes obliczył promień Ziemi; wie, co to jest sito Eratostenesa)
- **Abakus** (zna działania na liczbach w układzie dwójkowym pionkami na kratce)

Artykuł Małgosi Mikołajczyk przyszedł trochę za wcześnie. Nie ma też zachęcającego tytułu. Zdobywanie sprawności wg pomysłu Aleksandra Kamińskiego to nie jest tylko lista umiejętności, to jest pewien system pracy starszych uczniów i takich, którzy nauczyli się czegoś „co w ich oczach warto”, z tymi, którzy też są chętni. Istniał też pewien rytuał przechodzenia przez kolejne wtajemniczenia w danej na ogół dość skromnej dziedzinie. Wiązało się to ze zdobywaniem pewnego tytułu i oznaki, którą można było sobie przyszyć na rękawie i się z tym obnosić.

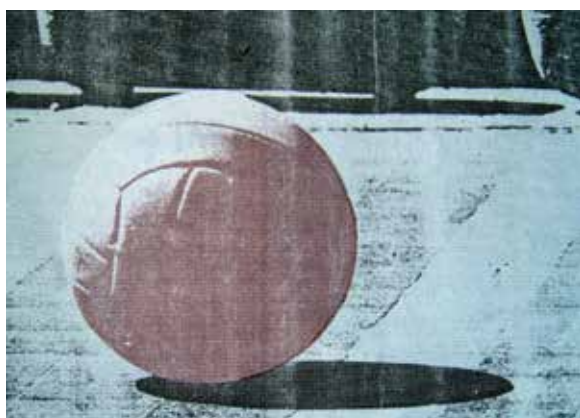
To są istotne cechy tej metody (por. wspomniane malowanie płotu przez Tomka Sawyera). Ta metoda jest pożyteczna np. wtedy, gdy pojawi się pewna prosta metoda na coś i nauczyciel sam nie może i nie powinien poświęcać na nią za dużo czasu, a ma pod swoją pieczę uczniów, którzy już się tego nauczyli i czekają na okazję pokazania swoich osiągnięć. Będą również rozwijać przy takiej okazji umiejętności kluczowe. W klasycznej organizacji pracy szkoły nie ma do tego wielu okazji.

Te sprawy trzeba przedyskutować i przemyśleć z ewentualnymi chętnymi nauczycielami i ich przełożonymi, dyrektorami szkół, którzy mogą wyrazić zgodę na taką stopniowo wprowadzaną innowację.

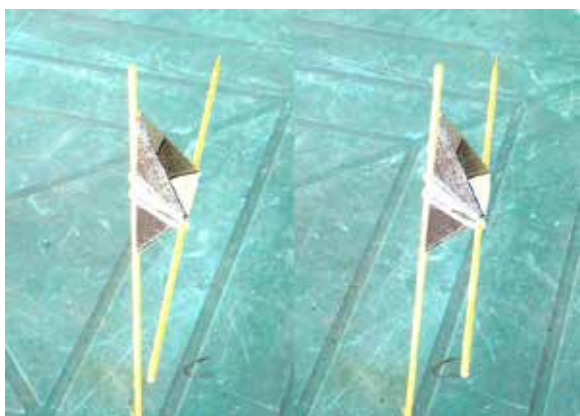
Równoległe do okazji zdobywania umiejętności rachunkowych powinna być okazja rozwijania wyobraźni wizualnej i koniecznie musi być ten moment łatwego konkretnego wejścia na pierwszy stopień wtajemniczenia dla każdej sprawności. W odpowiednim momencie można wprowadzić sprawność **Fotograf**, bardzo ważną w dzisiejszych czasach. Trzeba ustalić różne etapy dla tej sprawności, na różnych szczeblach nauczania. Ta sprawność bardzo rozwija wyobraźnię wizualną, bardzo potrzebną w matematyce i ogólnie w życiu. Fotografowanie cieni modeli patyczkowych różnych figur geometrycznych bardzo rozwija wyobraźnię geometryczną.



**Uczniowie badają cienie zbudowanych modeli. Nauczycielka dyskretnie stoi z boku, ale czuwa.**

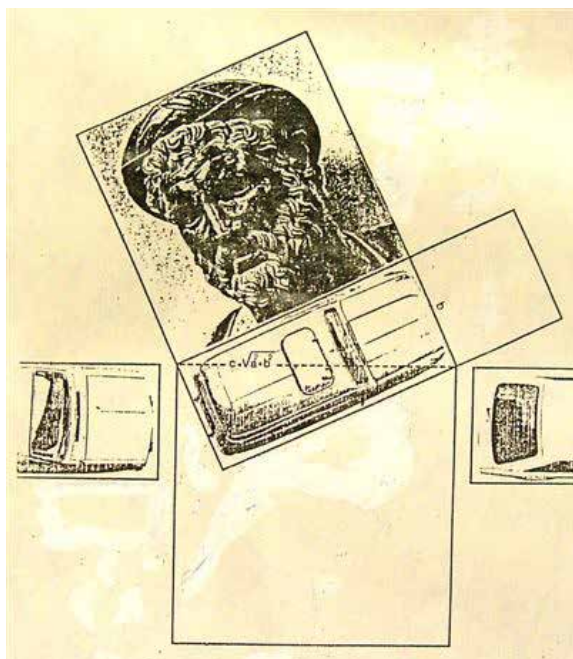


**Kula dotyka elipsy swego cienia w jej ognisku.**

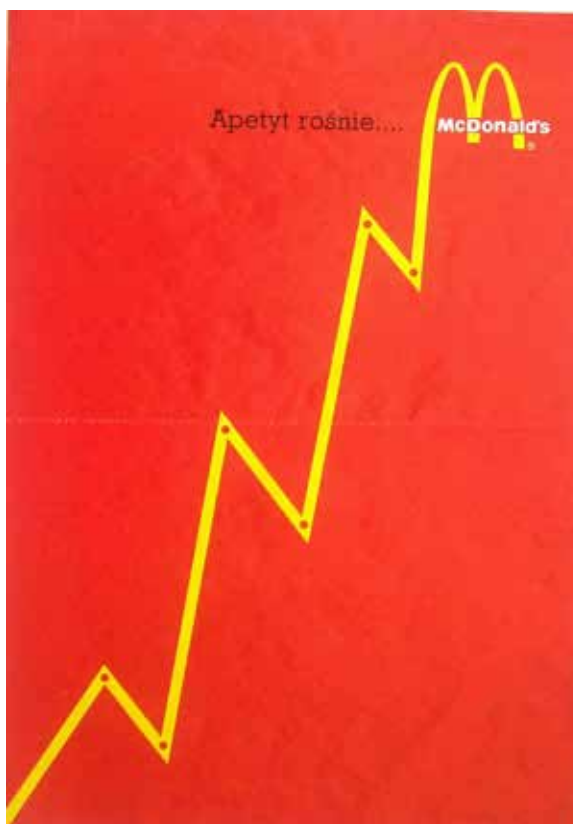


**Złoty czworościan ma dwie krawędzie skośne, które są prostopadłe.**

Czasem komentarz do zdjęcia można napisać w formie haiku, która dobrze wyraża krótkie spostrzeżenia. Pasuje do fotografii, która pokazuje coś matematycznego, chwytą istotny punkt, błysk myśli. Czasem pozornie technicznie niedbały obraz trafia w sedno. Niektóre obrazy impresjonistów też pozornie wydają się niedbałe.



**Tu Pitagoras myśli, jak zaparkować swoją brykę.**



**Apetyt rośnie, wykresy funkcji powszednieją.**

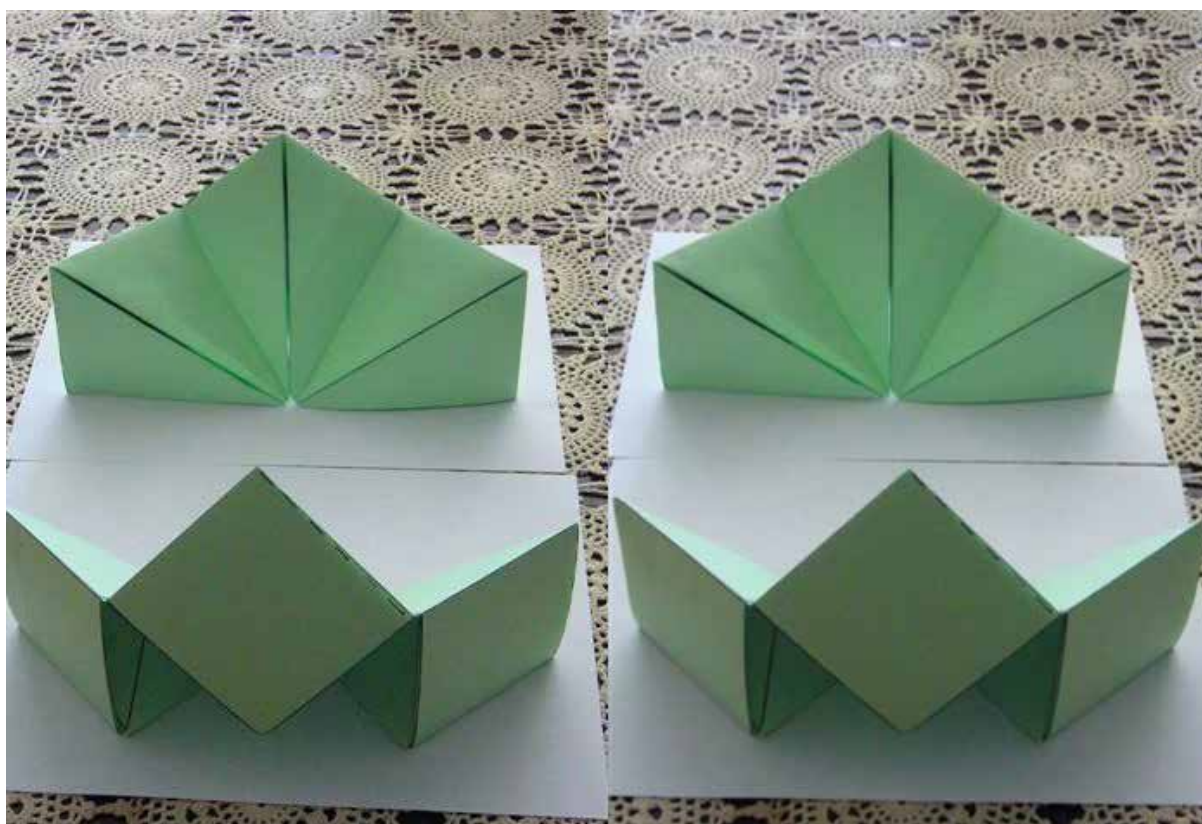


Kupa śmieci rzuca cień. Ciekawy cień.

## Bibliografia

1. Mikołajczyk M. *Lista umiejętności – inne spojrzenie na program nauczania matematyki*, „Matematyka” nr 3/1992.
2. Wilson K., Daviss B. *Redesigning Education*, John Macrae Book, Henry Holt & Company, 1994.

**Prof. dr hab. Wacław ZAWADOWSKI** – wybitny specjalista w dziedzinie dydaktyki matematyki, legendarny wychowawca wielu pokoleń świetnych nauczycieli. Autor i współautor wielu znanych podręczników i serii podręczników szkolnych, m.in. z cyklu „Matematyka 2001”, współzałożyciel i wieloletni Przewodniczący Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki, honorowy członek SNM, redaktor kwartalnika NiM+TI.



Trzy ostrostupy. Tryptyk Cavalieri z przodu i z tyłu.